Quelques points de mathématiques

Philippe Litou

14 février 2003

Table des matières

Première partie

Analyse

Chapitre 1

Continuité

Théorème 1.0.0.1 (Variation aux bornes d'un intervalle)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a,b],$(a, b) \in \mathbb{R}^2$
f est croissante sur]a,b[$\Rightarrow$ f est croissante sur [a,b].

Preuve :
f est croissante sur [a, b[si $\forall x \in]a, b[, f(a) \leqslant f(x)$
Soient $x_0 \in]a, b[$ et $x \in]a, x_0[$. On a donc $a < x < x_0$.
f est croissante sur $[x, x_0]$ donc

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

Passons à la limite :

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant f(x_0)$$

Or f est continue en a donc

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

D'où $f(a) \leqslant f(x_0)$: f est croissante en a.

De même :
f est croissante sur]a, b] si $\forall x \in]a, b[, f(x) \leqslant f(b)$
Soient $x_0 \in]a, b[$ et $x \in]x_0, b[$. On a donc $x_0 < x < b$.
f est croissante sur $[x_0, x]$ donc

$$f(x_0) \leqslant f(x)$$

Passons à la limite :

$$f(x_0) \leqslant \lim_{x \to b} f(x)$$

Or f est continue en b donc

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

D'où $f(x_0) \leqslant f(b)$: f est croissante en b.
Conclusion : f est croissante sur $[a, b]$.

Deuxième partie

Algèbre

Chapitre 2

Combinatoire

On utilisara plutôt la notation

$$\mathcal{C}_n^p$$

plutôt que la notation américaine

$$\binom{n}{p}$$

Exercice 2.0.0.1 (Combinaisons)
Soit n $\in \mathcal{N}$. Calculer

$$\sum_{i=0}^{n} i\mathcal{C}_n^i$$

Une somme de combinaisons ressemble au développement du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k a^k.b^{n-k} \tag{2.1}$$

Il semble qu'on n'ait pas besoin de la présence de a et b. Posons $b = 1$. L'équation (2.1) nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k a^k \tag{2.2}$$

On peut prendre a = 1 mais il n'y aura pas de coefficient devant la combinaison $\mathcal{C}_n^k$. Le coefficient manquant est celui de l'exposant de a. Comment faire 'descendre' un exposant ? En dérivant. Remplaçons a par x, histoire d'avoir une fonction f_n en x :

$$f_n(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k x^k \tag{2.3}$$

Cette fonction est continue et dérivable sur R car c'est un polynôme :
$f \in \mathbb{R}[X]$. D'où :

$$f_n'(x) = n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k.\mathcal{C}_n^k.x^{k-1} \tag{2.4}$$

Maintenant, on prend $x = 1$:

$$f_n'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k.\mathcal{C}_n^k \tag{2.5}$$

Cette dernière égalité répond à la question.

Chapitre 3

Les complexes

Exercice non validé 3.0.0.1 (3 complexes)
Trouver l'ensemble des complexes de modules 1 z_1, z_2 et z_3 tels que
$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$

Exploitons le fait que le produit vaut 1. La meilleure façon de gérer les complexes quand on les multiplie est d'utiliser leur forme exponentielle. Un complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}, \theta \in]-\pi, \pi]$. Donc :

$$z_1 = e^{i\theta_1}, z_2 = e^{i\theta_2}, z_3 = e^{i\theta_3}, \theta_i \in]-\pi, \pi]$$

D'où

$$z_1 z_2 z_3 = e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} = 1 \tag{3.1}$$

Soit

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \tag{3.2}$$

Occupons-nous maintenant de la somme des complexes qui vaut 1. Cette-fois-ci on délaisse la forme exponentielle. On a le choix entre la forme cartésienne brute et la forme trigonométrique qui est un mélange des formes cartésienne et exponentielle. Le mieux est d'utiliser la forme trigo puisqu'on a déjà obtenu une condition sur les angles.
Un complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Donc

$$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2, z_3 = \cos\theta_3 + i\sin\theta_3$$

La somme valant 1, on a :

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + i\sin\theta_1 + i\sin\theta_2 + i\sin\theta_3 = 1 \tag{3.3}$$

Or

$$Re(\sum_{i=1}^{3} z_i) = Re(1) = 1, Im(\sum_{i=1}^{3} z_i) = Im(1) = 0$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=1\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0\end{array}\right. \tag{3.4}$$

Tenant compte de (3.2), le problème est équivalent à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta_1+\cos\theta_2=1-\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2=\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \theta_3=-(\theta_1+\theta_2)\end{array}\right. \tag{3.5}$$

Résolvons :

$$(3.5)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=1-\cos(\theta_1+\theta_2)\\ 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \theta_3=-(\theta_1+\theta_2)\end{array}\right. \tag{3.6}$$

Avec

$$\left\{\begin{array}{l}\theta_3=-(\theta_1+\theta_2)\\ p=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\\ q=\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\end{array}\right. \tag{3.7}$$

$(p,q)\in(]-\pi,\pi])^2$. On obtient :

$$(3.6)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2\cos p\cos q=1-\cos 2p\\ 2\sin p\cos q=\sin(2p)\\ (3.7)\end{array}\right. \tag{3.8}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos p\cos q=\sin^2 p\\ 2\sin p\cos q=2\sin p\cos p\\ (3.7)\end{array}\right. \tag{3.9}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos p\cos q=\sin^2 p\\ \sin p=0\quad ou\quad \cos q=\cos p\end{array}\right. \tag{3.10}$$

Si $\sin p=0$ on a :

$$(3.10)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos p=0\quad ou\quad \cos q=0\\ p=0\quad ou\quad p=\pi\end{array}\right. \tag{3.11}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos q=0\\ p=0\quad ou\quad p=\pi\end{array}\right. \tag{3.12}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}q=-\frac{\pi}{2}\quad ou\quad q=\frac{\pi}{2}\\ p=0\quad ou\quad p=\pi\end{array}\right. \tag{3.13}$$

Si $\sin p\neq 0$ on a $cosq=\cos p$ et donc :

$$(3.10)\Rightarrow\cos^2 p=\sin^2 p \tag{3.14}$$

$$\Rightarrow \cos(2p) = 0$$

$$\Rightarrow p \in \{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\} \tag{3.15}$$

et comme $\cos p = \cos q$:

$$\Rightarrow (p,q) \in \bigcup_{\epsilon\in\{-1;1\}} \{(\epsilon\pi/4, \epsilon\pi/4), (\epsilon\pi/4, -\epsilon\pi/4), (\epsilon 3\pi/4, \epsilon 3\pi/4), (\epsilon 3\pi/4, -\epsilon 3\pi/4)\} \tag{3.16}$$

Regroupons les deux cas :

$$(3.13) et (3.16) \Rightarrow \begin{cases} (q = -\frac{\pi}{2} \quad ou \quad q = \frac{\pi}{2}) \qquad et \qquad (p = 0 \quad ou \quad p = \pi) \\ ou \\ (p,q) \in \bigcup_{\epsilon\in\{-1;1\}} \{(\epsilon\frac{\pi}{4}, \epsilon\frac{\pi}{4}), (\epsilon\frac{\pi}{4}, -\epsilon\frac{\pi}{4}), (\epsilon\frac{3\pi}{4}, \epsilon\frac{3\pi}{4}), (\epsilon\frac{3\pi}{4}, -\epsilon\frac{3\pi}{4}\} \end{cases} \tag{3.17}$$

Comme $\theta_1 = \frac{p+q}{2} et \theta_2 = \frac{p-q}{2}$, on a en calculant les différentes possibilités :

$$(3.17) \Rightarrow \begin{cases} (\theta_1, \theta_2) \in \{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})\} \\ ou \\ (\theta_1, \theta_2) \in \{(-\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 0), (0, -\frac{\pi}{2}), (0, \frac{\pi}{2})\} \end{cases} \tag{3.18}$$

$$(3.17) \Rightarrow \begin{cases} (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0)\} \\ ou \\ (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \{(-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}), (0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})\} \end{cases} \tag{3.19}$$

Soit $(z_1, z_2, z_3) \in \{(-i, i, 1), (i, -i, 1), (-i, 1, i), (i, 1, -i), (1, -i, i), (1, i, -i)\}$

On vérifie aisément que ces nombres sont bien solutions (il faut vérifier car on a perdu l'équivalence lors de la résolution du système d'équations).

Ainsi :

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est l'ensemble des permutations de } \{1, -i, i\}}$