Polaire et inversion

Philippe Litou

7 mars 2003

Table des matières

Ce livret a pour but de présenter quelques éléments de géométrie qui ne figurent plus au programme du lycée. Comme je ne l'avais jamais étudiée, je me suis documenté avec des livres de géométrie du programme de 1962. Afin d'étudier l'inversion, ce livret présente auparavant la notion de
- puissance de point par rapport à un cercle, axe radical
- polaire d'un point par rapport à deux droites, à un cercle
- l'inversion proprement dite

Dans tout le livret on considèrera le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé direct.

Première partie

Polaire

Chapitre 1

Division harmonique

1.1 Définition

Définition 1.1.0.1 (Division harmonique)
Soient quatre points alignés du plan. On dit que les points I et J divisent harmoniquement le segment [AB] ou encore que I et J sont conjugués harmoniques par rapport à A et B pour exprimer que le birapport [A,B,I,J] est égal - 1 ; en d'autres termes :

$$\frac{\frac{\overline{AI}}{\overline{AJ}}}{\frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}} = -1 \qquad soit \qquad \frac{\overline{AI}}{\overline{AJ}} = -\frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}$$

On dit aussi que B est le conjugué de A par rapport à I et J.

I est le conjugué de J par rapport à A et B si et seulement si J le conjugué de I par rapport à A et B.

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AJ}} = -\frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}} \Leftrightarrow \frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\frac{\overline{JA}}{\overline{JB}}$$

Donc

Propriété 1.1.0.1
I et J sont conjugués harmoniques par rapport à A et B équivaut à A et B sont conjugués harmoniques par rapport à I et J.

1.2 cercle d'Appolonius

Théorème-définition 1.2.0.1 (cercle d'Appolonius)
L'ensemble des points du plan dont le rapport des distances à deux points fixes A et B est constant et distinct de 1 est un cercle de diamètre [IJ] où I et J sont les points de la droite (AB) divisant le segment [AB] dans le rapport k. Ainsi le birapport (A,B,I,J) est harmonique.

Théorème 1.2.0.1 (cercle d'Appolonius et bissectrices)
Dans les conditions du théorème 1.2.0.1,(MI) et (MJ) sont les bissectrices de l'angle $\widehat{AMB}$.

Théorème 1.2.0.2 (relation de Descartes)
Soient 4 points A, B, C, D distincts et alignés. En choisissant un repère dont l'origine est en A on a :
Les points C et D sont conjugués harmoniques de A et B si et seulement si

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$$

C'est dire que la mesure algébrique de [AB] est la moyenne harmonique de celles de [AC] et [AD]

Propriété 1.2.0.2
En choisissant l'origine en le milieu I de [AB], on montre facilement que

$$IA^2 = IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$$

Chapitre 2

faisceau harmonique

2.1 Définition

Définition 2.1.0.2 (faisceau harmonique)
Si quatre droites coplanaires et concourantes en un point O sont coupées harmoniquement par une droite (d) en quatre points A, I, B et J, on dit qu'elles forment un faisceau harmonique. O est le centre du faisceau, (OA), (OB), (OI) et (OJ) en sont les rayons. On notera O(A,B,I,J) un tel faisceau. Si les droites sont parallèles, on parle encore de faisceau harmonique (intersection "rejetée" à l'infini).

2.2 Propriétés

Propriété 2.2.0.3
La conservation du birapport permet d'énoncer que toute droite intersectant un faisceau le divise harmoniquement.

O(A,B,I,J) est harmonique et est coupé par une droite (AJ') où J est sur (OJ). soient $B' = (AJ') \cap (OB)$ et $I' = (AJ') \cap (OI)$.
La parallèle à (OA) passant par B coupe (OI) en K et (OJ) en L.
La parallèle à (OA) passant par B' coupe (OI) en K' et (OJ) en L'.
Selon la propriété de Thalès, on peut écrire

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{KB}} \qquad et \qquad \frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{LB}}$$

(A,B,I,J) étant harmonique, on a

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\frac{\overline{JA}}{\overline{JB}}$$

D'où $\overline{KB} = -\overline{LB}$: B est le milieu de $[KL]$. Toujours par application du théorème de Thalès, B' est le milieu de [K'L'] et

$$\frac{\overline{I'A}}{\overline{I'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{K'B'}} \qquad et \qquad \frac{\overline{J'A}}{\overline{J'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{L'B'}}$$

Comme $\overline{K'B'} = -\overline{L'B'}$, l'égalité ci-dessus permet de dire que

$$\frac{\overline{I'A}}{\overline{I'B'}} = -\frac{\overline{J'A}}{\overline{J'B'}}$$

et donc (A,B',I',J') est harmonique. D'où le théorème suivant :

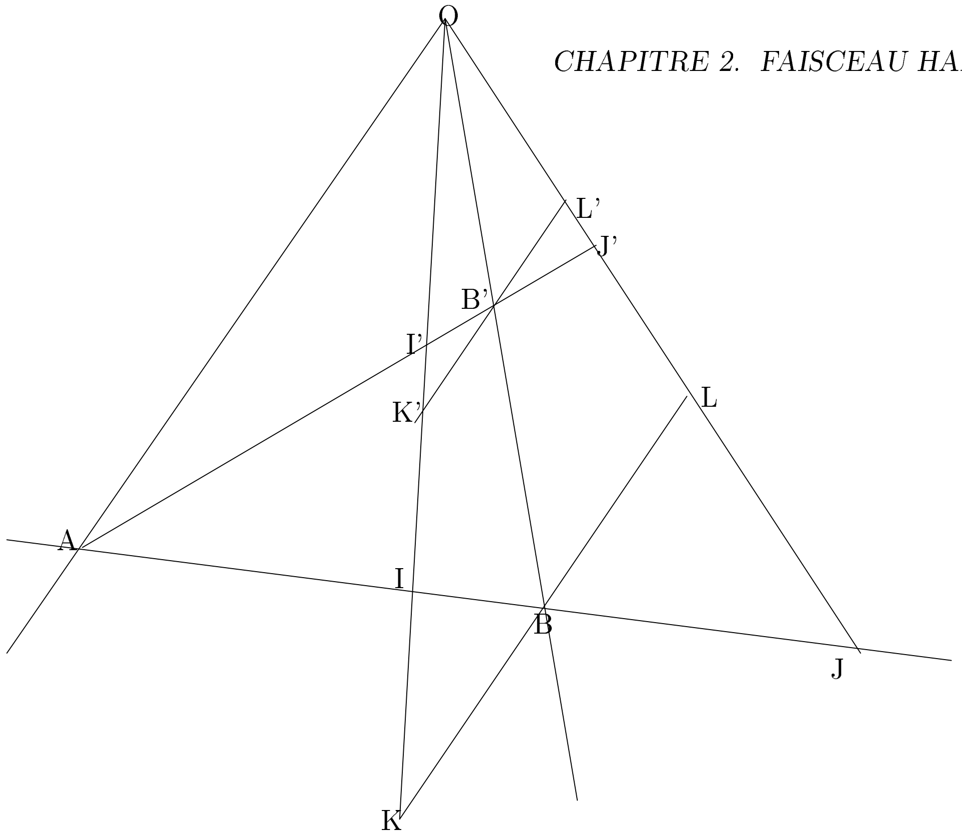

FIG. 2.1 – faisceau harmonique

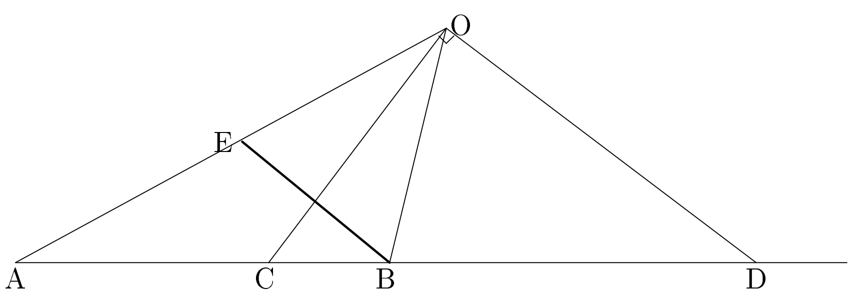

FIG. 2.2 – faisceau harmonique

THÉORÈME 2.2.0.3
Quatre droites concourantes (d1,d2,d3,d4) forment un faisceau harmonique si et seulement si une parallèle à (d1) ou (d4) détermine des segments égaux sur les trois autres.

Application : on considère un triangle ABO, sa bissectrice intérieure [OC) et sa bissectrice extérieure [OD) qui est donc perpendiculaire à [OC).

Menons de B la parallèle à [OD) coupant [OA) en E ; [OC) est alors perpendiculaire à [EB] et le triangle OEB est donc isocèle puisque ses hauteur bissectrice principales se confondent.

Par conséquent [OC) coupe [EB] en son milieu : d'après le résultat précédent, le faisceau O(A,B,C,D) est harmonique

Chapitre 3

polaire d'un point par rapport à deux droites

Définition 3.0.0.3 (polaire d'un point par rapport à deux droites)
On dira que deux points A et B sont conjugués par rapport à deux droites (d) et (d') si (AB) coupe (d) et (d') en deux points I et J tels que (A,B,I,J) soit harmonique.

Théorème-définition 3.0.0.2 (droite polaire)
L'ensemble des points, conjugués harmoniques d'un point A par rapport à deux droites (d) et (d') est une droite appelée polaire de A par rapport à (d) et (d').

La construction relève d'un résultat remarquable relatif au quadrilatère complet : on a ici (d) = (OI) et (d') = (OJ).

On trace une sécante quelconque issue de A coupant [OI] en I' et [OJ) en J' ; On note u l'intersection de [I'J] et [IJ'] ; la polaire de a est la droite (Ou).

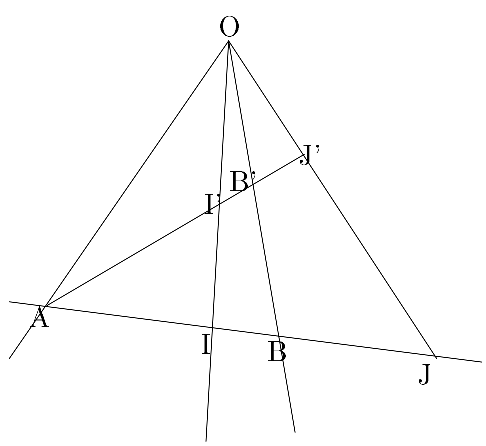

Fig. 3.1 – construction de la polaire