Le triangle

Philippe Litou

6 mars 2003

Table des matières

Dans ce livret on considère un triangle ABC avec A', milieu de $[BC]$, B' milieu de $[AC]$ et C' milieu de $[AB]$, H l'orthocentre, G le centre de gravité, O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit à ABC et ω le centre du cercle $(\mathcal{C}')$ circonscrit à A'B'C', I le centre du cercle (Γ) inscrit à ABC, $A_\perp$, $B_\perp$ et $C_\perp$ sont respectivement les pieds des hauteurs de ABC issues de A, B et C.

On considèrera le repère $(A', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé, avec
$A(a, b), b \neq 0, B(-\alpha, 0), C(\alpha, 0)), \alpha > 0$.

Première partie

Les droites du triangle

Chapitre 1

Médiatrices

1.1 Concourrance

Théorème 1.1.0.1 (Concourrance des médiatrices)
Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Preuve :
La médiatrice de [AB] coupe celle de [AC] en un point 0.
0 est sur la médiatrice de [AB] donc $OA = OB$.
0 est sur la médiatrice de [AC] donc $OA = OC$.
Du coup, $OA = OB = OC$, d'où il existe un cercle de centre O passant par A, B et C.

1.2 cas du triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A. La médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et est parallèle à (AC) (car perpendiculaire à (AB) qui elle-même est perpendiculaire à (BC)). On en déduit que la médiatrice coupe $[BC]$ en son milieu, c'est-à-dire au milieu de l'hypothénuse. La médiatrice de [BC] passe par ce point par définition, et comme les médiatrices d'un triangle sont concourrantes d'après le théorème 1.1.0.1, on en déduit que le centre du cercle circonscrit au triangle est le milieu de l'hypothénuse. Enonçons le théorème obtenu :

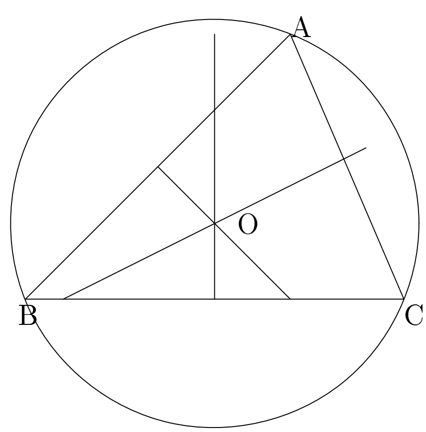


Fig. 1.1 – Mediatrices de ABC

Théorème 1.2.0.2 (Cercle circonscrit au triangle rectangle)
Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypothénuse.

Réciproquement :
Soit le cercle (C) de diamètre $[AB]$, de centre O et C un point du cercle distinct de A et B. Montrons que ABC est rectangle en C.
Soit D milieu de $[AC]$. $OA = OC$ et $DA = DC$ donc (OA) est la médiatrice de $[AC]$. Ainsi $(OD)\perp(AC)$.
O est le milieu de $[AB]$ et D, milieu de $[AC]$ donc $(OD)//(BC)$. Comme $(OD)\perp(AC)$ on en déduit que $(BC)\perp(AC)$ et donc que ABC est rectangle en C. D'où :

Théorème 1.2.0.3 (Réciproque)
Soit en cercle de diamètre [AB] et un point C sur le cercle distinct de A et de B. ABC est rectangle en C.

1.3 analyse du cercle

1.3.1 Coordonnées du centre du cercle circonscrit

La médiatrice (Δ_a) de $[BC]$ est perpendiculaire à (BC) et passe par le milieu de $[BC]$, centre du repère donc l'équation de (Δ_a) est

$$(\Delta_a) : x = 0 \tag{1.1}$$

D'abord, cherchons l'équation de (AC) :

$$M \in (AC) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & \alpha-a \\ y-b & -b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -bx + (a-\alpha)y + \alpha b = 0$$

L'équation de (AC) est donc

$$-bx + (a-\alpha)y + \alpha b = 0 \tag{1.2}$$

Un vecteur directeur de (AC) a pour coordonnées $(\alpha - a, -b)$, donc un vecteur directeur d'une perpendiculaire à (AC) a pour coordonnées $(b, \alpha - a)$, d'où l'équation de (Δ_b), médiatrice de $[AC]$ est de la forme $(\alpha - a)x - by + c = 0$. Le point B' milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $B(\frac{a+\alpha}{2}, \frac{b}{2})$. B' appartenant à (Δ_b), l'équation donne $c = \frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2}$ d'où l'équation de (Δ_b) est

$$(\Delta_b) : (\alpha - a)x - by + \frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2} = 0 \tag{1.3}$$

Le point 0 est l'intersection des médiatrices, donc

$$\{O\} = (\Delta_a) \cap (\Delta_b)$$

Compte tenu de (1.1) et (1.3), on déduit les coordonnées de O :

$$O(0, \frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2b})$$

En posant $\gamma = \frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2b}$, on a

$$O(0, \gamma)$$

1.3.2 rayon du cercle circonscrit

Soit r ce rayon. r = OC.

$$\overrightarrow{OC}(\alpha, -\frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2b})$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2b}\right)^2}$$

$$r = \frac{1}{2b}\sqrt{4b^2\alpha^2 + (a^2+b^2-\alpha^2)^2}$$

En posant $\gamma = \frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2b}$, on a

$$r = \sqrt{\alpha^2+\gamma^2}$$

Exemple pour $a = 4, b = 14, \alpha = 10$: $\gamma = 4$, $O(0;4)$ et $r = 2\sqrt{29}$

1.3.3 équation du cercle circonscrit

On utilise l'équation générique d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R, qui est :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Ce qui donne ici

$$x^2 + \left(y - \frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2b}\right)^2 = \alpha^2 + \left(\frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2b}\right)^2$$

Soit

$$x^2 + (y-\gamma)^2 = \alpha^2 + \gamma^2$$

avec $\gamma = \frac{a^2+b^2-\alpha^2}{2b}$

1.3.4 coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit

A mon avis il offre peu d'intérêt.
On peut trouver deux réels u et v avec $1+u+v \neq 0$ tels que O soit le barycentre du système $\{(A,1),(B,u),(C,v)\}$.

$$\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OB} + v\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b-\gamma \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\gamma \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha u - \alpha v = a \\ u\gamma + \gamma v = b - \gamma \end{array}\right. \tag{1.4}$$

$\gamma = 0 \Rightarrow b = 0$ or $b \neq 0$ par hypothèse (sinon on aurait un triangle aplati) donc $\gamma \neq 0$. Le cas $\gamma = 0$ correspond à $O = A'$, c'est-à-dire quand ABC est un triangle rectangle en A : le centre du cercle circonscrit est alors le milieu de l'hypothénuse et en effet dans ce cas O ne peut pas être un barycentre de (A,B,C) avec un coefficient non nul pour A puisque O est sur (BC).

Comme $\alpha \neq 0$ et $\gamma \neq 0$, la résolution du système donne

$$\left\{\begin{array}{l} u = \frac{a}{2\alpha} + \frac{b}{2\gamma} - \frac{1}{2} \\ v = -\frac{a}{2\alpha} + \frac{b}{2\gamma} - \frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{1.5}$$

$1+u+v=b/\gamma \neq 0$

En conclusion : si ABC n'est pas rectangle en A, O est le barycentre du système

$$\{(A,1),(B,\frac{a}{2\alpha}+\frac{b}{2\gamma}-\frac{1}{2}),(C,-\frac{a}{2\alpha}+\frac{b}{2\gamma}-\frac{1}{2})\}$$

Si ABC est rectangle en A, O est l'isobarycentre de (A,B).

Vérifions que si ABC est rectangle en C par exemple, le coefficient de C est nul. ABC rectangle en C $\Rightarrow a=\alpha \Rightarrow \gamma=\frac{b}{2}$
$\Rightarrow u=1$ et $v=0$: c'est cohérent.

On peut aussi multiplier chaque coefficient par $2\alpha\gamma$, ce qui permet d'obtenir une formule générale, qui donne

$$O, \quad barycentre \quad de \qquad \{(A,2\alpha\gamma),(B,\alpha\gamma+\alpha b-\alpha\gamma),(C,-\alpha\gamma+\alpha b-\alpha\gamma)\}$$

Cette formule reste valable quand ABC est rectangle en A pour lequel cas $\gamma=0$.

Chapitre 2

Médianes

2.1 concourrance

Théorème 2.1.0.1 (Concourrance des médianes)
Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre de gravité du triangle.

Preuve :
Soit G centre de gravité de ABC. G est donc barycentre de {(A,1),(B,1),(C,1)} et donc

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Soit A" tel que GBA"C est un parallélogramme : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA"} = 2\overrightarrow{GA'}$ car A' est le milieu de [BC] donc est le centre du parallélogramme. On a donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'} \end{cases} \tag{2.1}$$

D'où $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ ou encore $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. G est sur la médiane [AA']. On montre de même que G est sur les deux autres médianes, d'où le résultat.

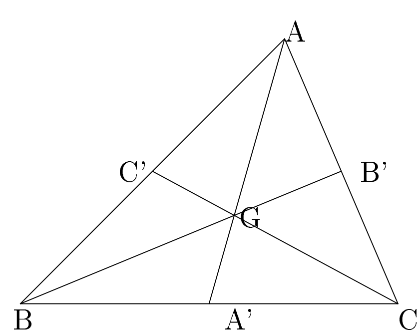


Fig. 2.1 – Medianes de ABC

2.2 Coordonnées de G

Le point G, centre de gravité du triangle, est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
$\overrightarrow{AA'}(-a, -b)$ donc $\overrightarrow{AG}(-2a/3, -2b/3) = (x_G - a, y_G - b)$, d'où

$$G(\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$$

Exemple pour $a = 4, b = 14, \alpha = 10 : G(\frac{4}{3}; \frac{14}{3})$

Chapitre 3

Hauteurs

3.1 Concourrance

Théorème-définition 3.1.0.1 (Concourrance des hauteurs)
Les hauteurs d'un triangle sont concourrantes en un point, appelé l'orthocentre du triangle.

Preuve :
Soient $A_\perp$ le pied de la hauteur issue de A, $A_\perp$ celui de la hauteur issue de B. Soit H le point d'intersection de ces deux hauteurs.
Soient les droites (D_a), parallèle à (BC) passant par A, (D_b), parallèle à (AC) passant par B, (D_c), parallèle à (AB) passant par C. Soient les points E, F et G tels que $(D_a)\bigcap(D_b) = \{E\}$, $(D_a)\bigcap(D_c) = \{F\}$, $(D_b)\bigcap(D_c) = \{G\}$. $(EB)//(AC)$ et $(AE)//(BC)$ donc AEBC est un parallélogramme.
$(AB)//(CF)$ et $(AF)//(BC)$ donc ABCF est un parallélogramme.
AEBC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$.
AECF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CB}$.
Il en résulte que $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AE}$ et donc A est le milieu de [EF].
On démontre de même que B est le milieu de [EG] et C le milieu de [FG].
$[AA_\perp]$ étant une hauteur de ABC, $(AA_\perp) \perp (EF)$. Comme A est le milieu de [EF], (A$A_\perp$) est la médiatrice de [EF]. On montre de même que (B$B_\perp$) est la médiatrice de [EG]. D'après le théorème 1.1.0.1 on sait que les trois médiatrices du triangle EFG sont concourrantes. Comme H appartient à ces deux médiatrices, il appartient à la troisième : celle de [FG]. Comme C est le milieu de [FG], (CH) est donc cette troisième médiatrice. Comme $(AB)//(FG)$ et $(HC)\perp(FG)$ on a $(CH)\perp(AB)$ Soit C' le point commun à (AB) et à (CH), [CC'] est donc la hauteur de ABC issue de C et elle passe par H.

3.2 Coordonnées relatives à H

3.2.1 coordonnées de H

$H(x_h, y_h)$ Soient $A_\perp$ et $B_\perp$ les pieds respectifs des hauteurs issues de A et de B.
$\{H\} = (AA_\perp)\bigcap(BB_\perp)$.
Equation de $(AA_\perp)$:

$$x = a \tag{3.1}$$

Equation de $(BB_\perp)$:
Nous avons vu dans la section 1.3 que l'équation de (AC) est :

$$-bx + (a - \alpha)y + \alpha b = 0 \tag{3.2}$$

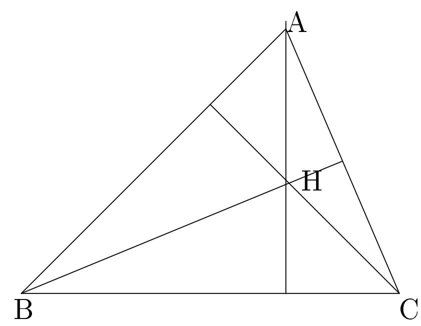


FIG. 3.1 – Hauteurs de ABC

Un vecteur directeur de (AC) a pour coordonnées $(\alpha - a, -b)$, donc un vecteur directeur d'une perpendiculaire à (AC) a pour coordonnées $(b, \alpha - a)$, d'où l'équation de $(BB_\perp)$ est de la forme $(a-\alpha)x - by + c = 0$. Comme au point B, l'équation donne c $= \alpha(\alpha - a)$ d'où l'équation de $(BB_\perp)$ est

$$(\alpha - a)x - by + \alpha(\alpha - a) = 0 \tag{3.3}$$

(3.1) et (3.3) donnent l'intersection des deux droites et donc les coordonnées de H, soit

$$H(a, \frac{\alpha^2 - a^2}{b})$$

On peut écrire $\frac{\alpha^2-a^2}{b} = 2\frac{\alpha^2-a^2-b^2}{2b} + b = -2\gamma + b$ D'où

$$H(a, b - 2\gamma)$$

Exemple pour $a = 4, b = 14, \alpha = 10$: $\gamma = 4$ et $H(4;6)$

3.2.2 coordonnées barycentriques de H

Soit E l'un des trois sommets de ABC. ABC est rectangle en E, H=E. Dans la suite on considèrera qua ABC n'est pas rectangle.

ABC n'étant pas rectangle, H n'est pas sur le support d'un des côtés du triangle, et donc on peut trouver deux réels u et v tels que H est le barycentre du système {(A,1), (B,u), (C,v)}.

$$\overrightarrow{HA} + u\overrightarrow{HB} + v\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b + \frac{a^2-\alpha^2}{b} \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -\alpha - a \\ \frac{a^2-\alpha^2}{b} \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \alpha - a \\ \frac{a^2-\alpha^2}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} (a+\alpha)u + (a-\alpha)v = 0 \\ (a^2-\alpha^2)u + (a^2-\alpha^2)v = a^2 + \alpha^2 - b^2 \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Ceci donne

$$v\left((a-\alpha)^2 - (a^2 - \alpha^2)\right) = b^2 - \alpha^2 + a^2$$

soit

$$v = \frac{b^2 - \alpha^2 + a^2}{2\alpha(\alpha - a)}$$

De même

$$u = \frac{b^2 - \alpha^2 + a^2}{2\alpha(\alpha + a)}$$

Exemple avec $\alpha = 10, a = 4, b = 14$:
$u = \frac{2}{5}, v = \frac{14}{15}$, soit

$$H : \{(A, 1), (B, \frac{2}{5}), (C, \frac{14}{15})\}$$

Chapitre 4

Bissectrices

4.1 concourrance

Théorème 4.1.0.1 (Concourrance des bissectrices)
Soit ABC un triangle, avec $a = BC, b = AC, c = AB$. Les bissectrices intérieures de ABC sont concourantes en un point qui est le barycentre du système {(A,a),(B,b),(C,c)}.

Preuve :
Soit I le barycentre du système {(A,a),(B,b),(C,c)}. Soient A' le point de [BC] tel que (AA') est la bissectrice intérieure de l'angle Â et s la réflexion d'axe (AA'). Elle transforme (AB) en (AC). Soit (Δ) la bissectrice extérieure de Â. On trace B", image de B par la réflexion s' d'axe (Δ). $(\Delta) \perp (BB")$ et $(\Delta) \perp (AA')$ donc $(BB")//(AA')$ et $AB" = AB$.
La composée de deux réflexions dont les axes sont sécants est une symétrie centrale dont le centre est le point d'intersection des axes. (AC) a pour image (AB) par s et (AB) a pour image (AB") par s'. Ainsi $(AC)//(AB")$. De plus $A \in (AC) \bigcap (AB")$ donc $(AC) = (AB")$ et A, C et B" sont alignés.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{AB"}}{\overline{AC}} \tag{4.1}$$

Comme (AA') est la bissectrice intérieure de Â, A' est dans le segment [BC], donc $\overline{A'C}$ et $\overline{A'B}$ sont de signes contraires. Pour la même raison, $\overline{AB"}$ et $\overline{AC}$ sont de signe contraires. $AB" = AB = c$. Ainsi (4.1) devient :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{c}{b} \tag{4.2}$$

Soit

$$b\overline{A'B} = -c\overline{A'C} \tag{4.3}$$

A', B et C étant alignés,

$$b\overrightarrow{A'B} + c\overrightarrow{A'C} = 0 \tag{4.4}$$

A' est donc le barycentre du système {(B,b),(C,c)}. Comme I l'est pour le système {(A,a),(B,b),(C,c)}, il l'est pour {(A,a),(A',b+c)} (théorème du barycentre partiel) et donc I est sur la droite (AA').

On montre de même que I est sur (CC'), bissectrice intérieure de $\hat{C}$ et $C' \in [AB]$ et I est sur (BB'), bissectrice intérieure de $\hat{B}$ et $B' \in [AC]$. Ainsi les bissectrices intérieures sont bien concourantes et se coupent en le point barycentre du système {(A,a),(B,b),(C,c)}.

Théorème 4.1.0.2 (Cercle inscrit au triangle)
Le point de concours des bissectrices intérieures d'un triangle est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

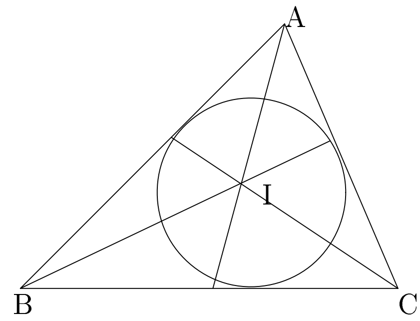


FIG. 4.1 – Bissectrices de ABC

Preuve :
Pour cela on peut montrer le lemme suivant :

LEMME 4.1.0.1 (CONCOURRANCE DES BISSECTRICES)
Si un point appartient à la bissectrice intérieure d'un angle alors ce point est équidistant des côtés de cet angle.

En effet : Soient deux droites (D_1) et (D_2) qui se coupent en un point A et (Δ) une bissectrice de Â. Soit B un point de (D_1). La perpendiculaire à (D_1) passant par B coupe (Δ) en un point I. La perpendiculaire à (D_2) passant par I coupe (D_2) en un point C. Il faut montrer que $IB = IC$.
(Δ) étant bissectrice de Â on a $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$. Comme $\widehat{IBA}$ et $\widehat{ICA}$ sont droits, les triangles ABI et ACI ont deux angles égaux. La somme des angles d'un triangle faisant π, ils ont le même troisième angle. Comme de plus ils ont un côté en commun : [AI], ils sont semblables. Ainsi $IB = IC$.

Soient respectivement α, β et γ les pieds des hauteurs des triangles IBC, IAC et IAB relatives au point I. D'après le lemme, en considérant la bissectrice (AI) de Â, les points β et γ étant respectivement sur (AC) et (AB), on a $I\beta = I\gamma$. En considérant la bissectrice (BI) de $\hat{B}$, les points α et β étant respectivement sur (BC) et (AC), on a $I\alpha = I\beta$.
Ainsi $I\alpha = I\beta = I\gamma$. I est donc le centre d'un cercle passant par α, β et γ. De plus $(I\alpha)\perp(BC)$ donc (BC) est une tangente au cercle. De même les deux autres côtés sont des tangentes au cercle, d'où ce cercle est inscrit à ABC.

4.2 Analyse

Dans cette section, on considère $d_a = BC, d_b = AC, d_c = AB$.

4.2.1 Coordonnées de I

$d_a = 2\alpha, d_b = \sqrt{(\alpha - a)^2 + b^2}, d_c = \sqrt{(\alpha + a)^2 + b^2}$. I étant le barycentre de $\{(A, d_a), (B, d_b), (C, d_c)\}$, on a avec $I(x, y)$:

$$2\alpha \begin{pmatrix} a - x \\ b - y \end{pmatrix} + d_b \begin{pmatrix} -\alpha - x \\ -y \end{pmatrix} + d_c \begin{pmatrix} \alpha - x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les coordonnées de I il faut et suffit de résoudre

$$\left\{\begin{array}{c} 2a\alpha - 2\alpha x - (\alpha + x)d_b + (\alpha - x)d_c = 0 \\ 2\alpha b - 2\alpha y - yd_b - yd_c = 0 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

ce qui donne

$$I(\alpha\frac{2a - d_b + d_c}{d_b + d_c + 2\alpha}, \frac{2\alpha b}{d_b + d_c + 2\alpha})$$

Pour notre exemple, on trouve $I(2,3;5,1)$ en approximation. $d_b \approx 15,23$ et $d_c \approx 19,80$. $d_b = 2\sqrt{58}, d_c = 14\sqrt{2}$

4.2.2 rayon du cercle inscrit

Soit I_a le projeté orthogonal de I sur (BC).Le rayon du cercle inscrit est II_a. Il est donc égal à l'ordonnée de I :
le rayon du cercle inscrit vaut $\frac{2\alpha b}{d_b+d_c+2\alpha}$

4.2.3 équation du cercle inscrit

L'équation du cercle inscrit est

$$\left(x - \alpha\frac{2a - d_b + d_c}{d_b + d_c + 2\alpha}\right)^2 + \left(y - \frac{2\alpha b}{d_b + d_c + 2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{2\alpha b}{d_b + d_c + 2\alpha}\right)^2$$

Chapitre 5

Droite et cercle d'Euler

Dans ce chapitre on considère un triangle ABC avec A', milieu de $[BC]$, B' milieu de $[AC]$ et C' milieu de $[AB]$, H l'orthocentre, G le centre de gravité, O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit à ABC et ω le centre du cercle $(\mathcal{C}')$ circonscrit à A'B'C'.

5.1 Droite d'Euler

5.1.1 existence de la droite

Théorème-définition 5.1.1.1 (Droite d'Euler)
L'orthocentre d'un triangle, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit au triangle et le centre du cercle circonscrit au triangle joignant le milieu des côtés du triangle initial sont sur une même droite, appelée la droite d'Euler du triangle.

Preuve :
Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, (Δ_a) la médiatrice de $[BC]$ et (D_a) la hauteur issue de A. Ces deux droites étant perpendiculaires à (BC), elles sont parallèles entre elles.
On sait que $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ donc $h(A) = A'$.
L'image de (D_a) par h est une droite parallèle à (D_a) qui passe par l'image de A, c'est-à-dire A'. Il s'agit donc de (Δ_a) : $h(D_a)) = (\Delta_a)$. h(H) est donc sur (Δ_a).
On montre de même que h(H) est sur (Δ_b) où (Δ_b) est la médiatrice de (AC) en considérant la hauteur issue de B et le point B'. De même h(H) est sur (Δ_c) où (Δ_c) est la médiatrice de (AB). Ainsi l'orthocentre est transformé en le centre O du cercle circonscrit : $h(H) = O$, d'où O, G et H sont alignés et $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$, soit $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$.

$A' = h(A), B' = h(B), C' = h(C)$, donc $h(ABC) = A'B'C'$ et $(\mathcal{C}') = h(\mathcal{C})$, d'où $h(O) = \omega$, et donc ω est sur la droite d'Euler.

$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ donc
$\overrightarrow{G\omega} + \overrightarrow{\omega O} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{G\omega} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega H}$ soit

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\omega H} - \overrightarrow{\omega O} \tag{5.1}$$

De plus $\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ donc
$\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{G\omega} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega O}$, soit

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\omega O} \tag{5.2}$$

D'après (5.1) et (5.2) on en déduit que $\overrightarrow{\omega O} = -\overrightarrow{\omega H}$ donc ω est le milieu de $[OH]$.

Corollaire 5.1.1.1 (relation entre O et H)
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

Preuve :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$$
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

donc
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$$

5.2 Cercle d'Euler

Théorème-définition 5.2.0.2 (Cercle d'Euler)
Le cercle passant par A', B' et C' est appelé le cercle d'Euler du triangle ABC. Il contient les pieds des hauteurs de ABC ainsi que les milieux de $[AH], [BH]$ et $[CH]$.

Preuve :
Il existe deux homothéties transformant un cercle en un autre. Les rapports sont opposés l'un de l'autre. Par conséquent il existe une homothétie h' de rapport $1/2$ transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.
ω étant le milieu de $[OH]$, on a : $\overrightarrow{H\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$. Or $h(O) = \omega$ donc H est le centre de h'. Soit $A_1 = h'(A).A \in \mathcal{C}$ donc $A_1 \in \mathcal{C}'$. Même chose pour les points B_1 et C_1 respectivement images de B et C par h'.
Soit P_a le pied de la hauteur de ABC issue de A. ω est le milieu de $[OH]$. Comme $(P_aA)//(OA')$, le projeté de ω suivant (P_aA) sur (BC) (donc ici son projeté orthogonal) est le milieu de $[P_aA']$. D'où ω est sur le médiatrice de $[P_aA']$. $\omega A' = \omega P_a$ donc P_a est sur $\mathcal{C}'$. Pour la même raison les pieds des deux autres hauteurs sont également sur $\mathcal{C}'$.

Théorème 5.2.0.1 (Symétrique de l'orthocentre)
Le symétrique de l'orthocentre par rapport aux trois côtés du triangle ABC est sur son cercle circonscrit.

2 preuves
1ere preuve :
L'homothétie de centre H et de rapport 2 est la réciproque de h'. Elle transforme donc $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}$. considérant toujours P_a comme étant le pied de la hauteur issue de A, comme P_a est sur $\mathcal{C}'$, son image Q_a par h^{-1} est sur $\mathcal{C}$ et $\overrightarrow{HQ_a} = 2\overrightarrow{HP_a}$ donc P_a est bien le milieu de $[HQ_a]$. Comme (BC) et (HQ_a) sont perpendiculaire, H et Q_a sont bien symétriques l'un de l'autre. Même chose pour les pieds P_b et P_c des autres hauteurs.

2è preuve : utilisation des angles de droites
H et Q_a sont symétriques par rapport à (BC) donc
$$(HB, HC) = (Q_aB, Q_aC)$$
. D'autre part le quadrilatère Q_bHQ_cA est droit en Q_b et Q_c donc les points A, H, Q_b et Q_c sont cocycliques. Il en résulte que $(AQ_a, AQ_b) = (HQ_a, HQ_b)$. Or $(HQ_a, HQ_b) = (HC, HB)$ puisque Q_a, H et C sont alignés et Q_b, H et B sont alignés d'une part et A, Q_c, B sont alignés, et Ah ! cul baissé, euh... pardon : A, Q_b, C sont alignés d'autre part. Il en résulte que
$$(HB, HC) = (AB, AC)$$
d'où $(AB, AC) = (Q_aB, Q_aC)$. Les points A, B, C et Q_a sont donc cocycliques d'où le théorème.

5.3 Analyse de la droite d'Euler

5.3.1 Existence de la droite

Démontrons par l'analyse que G, H et O sont alignés.

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{b}{3} - \frac{a^2+b^2-\alpha^2}{b} \end{pmatrix} 2\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 2\frac{a}{3} \\ \frac{-3a^2-b^2+3\alpha^2}{3b} \end{pmatrix} \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} a - \frac{a}{3} \\ \frac{\alpha^2-a^2}{b} - \frac{b}{3} \end{pmatrix}$$

On a bien $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$. La droite est définie quand les trois points ne sont pas confondus.

5.3.2 Equation de la droite

Soit (Δ) la droite d'Euler, soit M un point du plan.

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OH}) = 0 \Leftrightarrow x(\frac{\alpha^2 - a^2}{b} - \gamma) - ay + a\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{b}{2} - 2\gamma)x - ay + a\gamma = 0$$

L'équation de la droite d'Euler est

$$(b - 3\gamma)x - ay + a\gamma = 0 \quad avec \quad \gamma = \frac{a^2 + b^2 - \alpha^2}{2b}$$

Pour l'exemple choisi, l'équation est

$$x - 2y + 8 = 0$$

On peut vérifier que I n'est pas sur la droite, même si dans l'exemple il n'en est "pas loin". En effet, les coordonnées x_I et y_I vérifient

$$x_I - 2y_I + 8 \approx 0,14025$$

Pour calculer la distance entre I et la droite d'Euler on peut utiliser la formule

$$d = \frac{|ax_I + by_I + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

où $I(x_I, y_I)$ et $ax + by + c = 0$ est l'équation de la droite d'Euler. Le développement de la formule ne me semble pas bien intéressant.

Pour notre exemple cette distance vaut

$$d = \frac{|x_I - 2y_I + 8|}{\sqrt{5}}$$

soit $d \approx 0,044$

5.3.3 Cercle d'Euler

ω est son centre et est milieu de $[OH]$, donc

$$\omega(\frac{a}{2}, \frac{b - \gamma}{2})$$

ce qui donne dans l'exemple $\omega(2;5)$. Son rayon est la moitié de celui du cercle circonscrit à ABC, soit

$$r = \frac{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}{2}$$

L'équation du cercle d'Euler est

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b-\gamma}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{4}$$

Chapitre 6

Distances

6.1 Pythagore

6.1.1 Théorème de Pythagore

Théorème 6.1.1.1 (théorème de Pythagore)
Dans un triangle ABC rectangle , la somme des carrés des côtés adjacents à l'angle droit est égal au carré de l'hypothénuse.
Autrement dit
Soit ABC un triangle rectangle en A. On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Preuve : On suppose ABC rectangle en A. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Soit ρ le rapport de projection de l'angle $\hat{B}$. Dans la projection orthogonale sur (AB), C a pour image A, donc

$$\frac{BC}{BA} = \rho$$

On considère maintenant la projection orthogonale sur (BC). L'image de A est H. Considérant toujours le même angle $\hat{B}$, on conserve le même rapport de projection, soit

$$\frac{BA}{BH} = \rho$$

D'où

$$\frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$$

ou encore

$$BA^2 = BC.BH$$

On a de même

$$CA^2 = CB.CH$$

D'où

$$BA^2 + CA^2 = BC.BH + CB.CH = BC(BH + CH) = BC.BC = BC^2$$

car $H \in [BC]$.

6.1.2 Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème 6.1.2.1 (Réciproque du théorème de Pythagore)
Un triangle ABC vérifiant $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est rectangle en A.

Preuve :
Soit ABC un triangle vérifiant $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Soient O, le milieu de $[BC]$, (Γ) le demi-cercle de milieu O qui est dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas A et D le point de (Γ) tel que $BD = BA$. D'après le théorème 1.2.0.3 le triangle BCD est rectangle en D, et alors

$$BC^2 = DB^2 + DC^2 \tag{6.1}$$

Comme $BD = BA$

$$BC^2 = BA^2 + DC^2 \tag{6.2}$$

Comme de plus $BC^2 = AB^2 + AC^2$, on en déduit que $CD^2 = AC^2$, d'où $CD = CA$. Comme de plus $BA = BD$ par hypothèse, on peut dire que (BC) est la médiatrice de $[AD]$, ce qui permet d'affirmer que $OA = OD$. comme D est sur (Γ), $OB = OD$, d'où $OB = OA$ et A est donc sur le cercle de diamètre $[BC]$. D'après le théorème 1.2.0.3, on en déduit qua ABC est rectangle en A.

Théorème 6.1.2.2 (hauteur dans le triangle rectangle)
Soit un triangle ABC rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC). On a $AB.AC = AH.BC$.

Preuve :
L'aire de ABH est $\frac{AH.BH}{2}$. L'aire de ACH est $\frac{AH.CH}{2}$. Donc la somme des aires fait $\frac{AH.BH+AH.CH}{2} = \frac{AH(BH+CH)}{2} = \frac{AH.BC}{2}$ qui est l'aire du triangle ABC.

6.2 Distance des carrés

Théorème 6.2.0.3 (Distance minimale des carrés)
Soit ABC un triangle de centre de gravité G. Soit un point M du plan. Le point M tel que la distance $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimale est le point G.

2 preuves : une géométrique, et une analytique.

Preuve géométrique :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$
$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2MG.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimal quand $3MG^2$ est minimal, soit $M = G$.

preuve par la géométrie analytique.
Soit le repère orthonormé $(A', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où A' est le milieu de $[BC]$. Soit $d = MA^2+MB^2+MC^2$ $A(a,b), B(-\alpha,0), C(\alpha,0), M(x$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (\alpha+x)^2 + y^2 + (\alpha-x)^2 + y^2 \tag{6.3}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + 2\alpha^2 + 3x^2 + 3y^2 - 2ax - 2by. \tag{6.4}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + 2\alpha^2 - \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{3} + (\sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{3}y - \frac{b}{\sqrt{3}})^2 \tag{6.5}$$

d est minimale quand $(\sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{3}y - \frac{b}{\sqrt{3}})^2$ est minimale, soit quand $(\sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}})^2 = 0$ *et* $(\sqrt{3}y - \frac{b}{\sqrt{3}})^2 = 0$

soit $x = a/3$ et $y = b/3$.
d est donc minimale quand $M(a/3, b/3)$.

Le point G, centre de gravité du triangle, est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
$\overrightarrow{AA'}(-a, -b)$ donc $\overrightarrow{AG}(-2a/3, -2b/3) = (x_G - a, y_G - b)$, d'où G(a/3, b/3). Ainsi M=G.

6.3 Distance aux sommets

Soit ABC un triangle. Quel est le point M tel que $MA + MB + MC$ soit minimal ?

Soit Φ la fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des points du plan vers $\mathbb{R}^+$ par $P \mapsto PA + PB + PC$. Ce minimum est soit l'un des sommets du triangle, soit le point P défini par

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{PA} + \frac{\overrightarrow{PB}}{PB} + \frac{\overrightarrow{PC}}{PC} = \overrightarrow{0}$$

Pour l'instant, pas de démonstration.

6.4 Inégalités triangulaires

Les résultats suivants sont supposés acquis :
1/ Si A et B sont deux points du plan respectivement d'affixe z_A et z_B, l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$
2/

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \tag{6.6}$$

Soit ABC un triangle. A B et C ont pour affixes respectives z_A, z_B et z_C. D'après 6.6, en posant $z = z_B - z_A$ et $z' = z_C - z_B$, on a :

$$||z_B - z_A| - |z_C - z_B|| \leqslant |z_C - z_A| \leqslant |z_B - z_A| + |z_C - z_B| \tag{6.7}$$

ce qui donne :

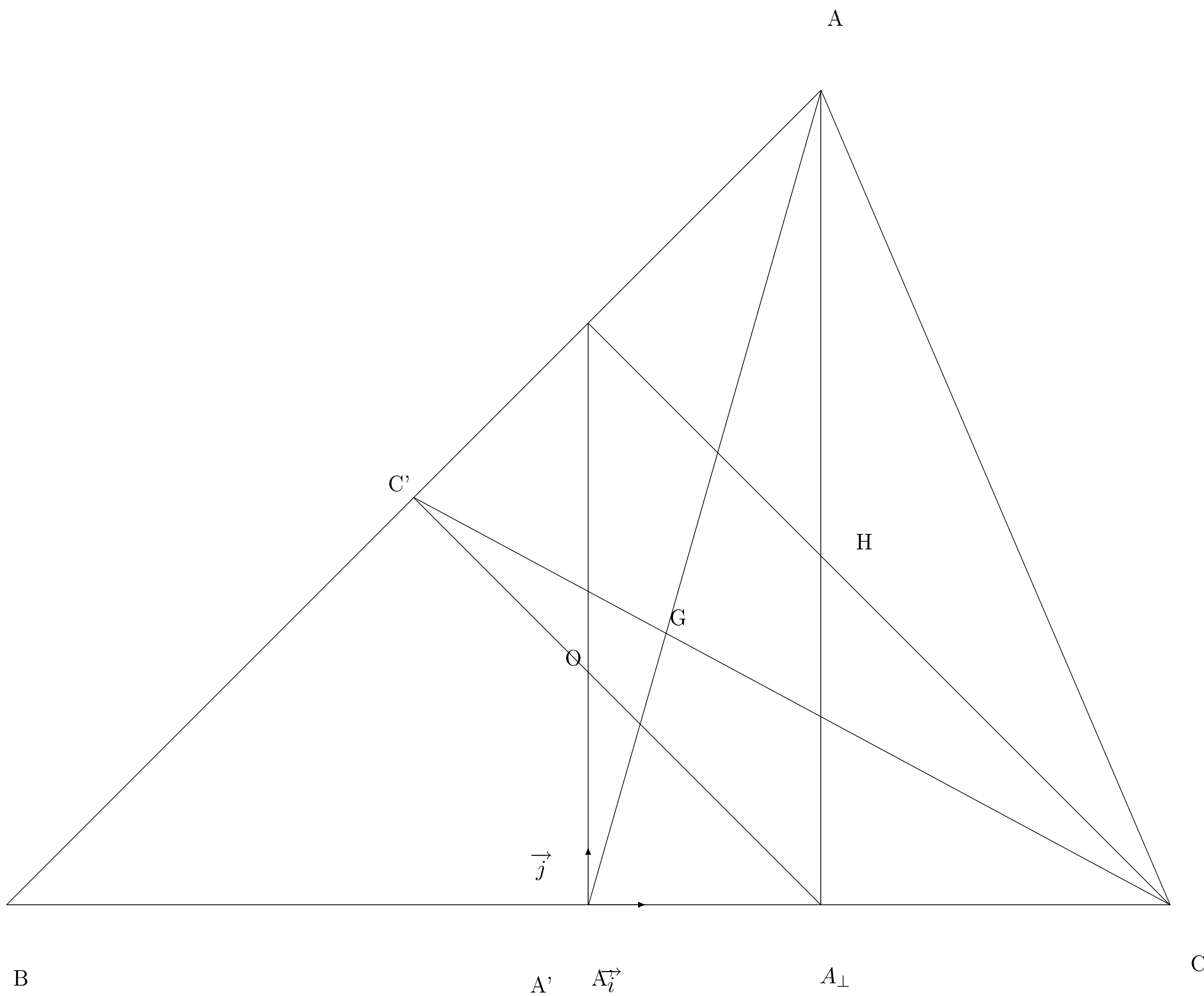
$$|AB - BC| \leqslant |AC| \leqslant |AB| + |BC| \tag{6.8}$$

D'où le théorème :

Théorème 6.4.0.4 (Inégalités triangulaires)
Soit ABC un triangle. La longueur d'un côté du triangle est comprise entre la différence et la somme des deux autres, soit

$$\boxed{|AB - BC| \leqslant |AC| \leqslant AB + BC}$$

Voici le triangle qui a servi d'exemple dans cette brochure.



Deuxième partie

Constructions

Chapitre 7

cercles inscrits et circonscrits

7.1 Prérequis

Pour ce chapitre les notions suivantes sont supposées être connues :
- la transformation 'inverse'
- la puissance d'un point par rapport à un cercle
- polaire d'un point

Notamment on admet le théorème suivant :

Théorème 7.1.0.5 (inverse d'un cercle)
L'inverse d'un cercle $(\mathcal{C})$ ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle homothétique $(\mathcal{C}')$. Le rapport λ de l'homothétie se déduit de la puissance d'inversion k par

$$\lambda = \frac{k}{p}$$

où p est la puissance du centre d'inversion par rapport au cercle $(\mathcal{C})$.

Si R est le rayon de $(\mathcal{C})$ et R' celui de $(\mathcal{C}')$, on a

$$\lambda = \pm\frac{R'}{R}$$

7.2 Relation d'Euler

Soit R le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O circonscrit à ABC et r celui du cercle (Γ), de centre I inscrit à ABC. Posons d = OI. Soient A", B" et C" les milieux respectifs de $[B'C']$, $[A'C']$ et $[A'B']$.

(B"C") est la polaire de A par rapport à (Γ) donc

$$\overline{IA}.\overline{IA"} = r^2$$

. De même $\overline{IB}.\overline{IB"} = r^2$ et $\overline{IC}.\overline{IC"} = r^2$.
Dans l'inversion de pôle I et de puissance r^2 le cercle $(\mathcal{C})$ devient le cercle (A"B"C"), cercle d'Euler de $(\mathcal{C}')$, de rayon $r/2$. Ainsi

$$\lambda = \frac{k}{p}, k = r^2, p = d^2 - R^2$$

$$|\lambda| = \frac{r/2}{R} = \frac{r}{2R}$$

car la valeur absolue du rapport d'homothétie est égale au rapport des rayons. Or $d < R$ donc $p < 0$ d'où $\lambda < 0$ et donc $\lambda = -\frac{r}{2R}$. Ainsi

$$\frac{r}{2R} = \frac{r^2}{R^2 - d^2}$$

et

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

Cette relation est appelée relation d'Euler du triangle ABC.

Réciproquement :
Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et (Γ) de rayons respectifs R et r tels que la distance des centres d vérifie $d^2 = R^2 - 2Rr$.
On a $d^2 = R(R - 2r) > 0$ donc $R > 2r > r$.
$d^2 < R^2 - 2Rr + r^2$ donc $d < R - r$. (Γ) est donc intérieur à $\mathcal{C}$. Soit (BC) une tangente en A' à (Γ) coupant $\mathcal{C}$ en B et C. Les tangentes à (Γ) issues de B et C se coupent en A. Montrons que A est sur (Γ).

Effectuons l'inversion de pôle I et de puissance r^2. L'image de $\mathcal{C}$ est un cercle passant par B" et C" et est de rayon ρ. La relation $\lambda = k/p$ donne

$$\frac{\rho}{R} = \frac{r^2}{|d^2 - R^2|}$$

$d^2 - R^2 < 0$ donc

$$\frac{\rho}{R} = \frac{r^2}{R^2 - d^2} d^2 = R^2 - \frac{R^2}{\rho}$$

Or $d^2 = R^2 - 2Rr$ donc $2Rr = \frac{Rr^2}{\rho}$ et $\rho = \frac{r}{2}$
Le cercle inverse de $\mathcal{C}$ passant par B' et C' est donc soit le cercle d'Euler de $(A'B'C')$ soit son symétrique par rapport à (B"C"), cercle de diamètre (IA') qui dans l'inversion devient une droite car il passe par I, d'où l'inverse de $\mathcal{C}$ est le cercle d'Euler $(A"B"C")$.

D'où le théorème suivant :

Théorème 7.2.0.6 (Relation d'Euler)
Deux cercles de centres O et I et de rayons R et r sont considérés comme inscrit et circonscrit à un triangle si et seulement si $d^2 = R^2 - 2Rr$ où $d = OI$ C'est la relation d'Euler.

S'il y a une solution, il y en a une infinité.